Clase 17: La Transformación de Fourier.

Peter Hummelgens

12 de diciembre de 2006

1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ (es decir existe $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$). Podemos asociar a $f(x)$ una nueva función $\hat{f}(\omega)$ de la variable real ω, llamada la transformada de Fourier de f, definida por

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{e-i\omega x} f(x)dx; \quad -\infty < \omega < \infty. \tag{1}$$

La integral converge absolutamente porque

$$|e^{-i\omega x} f(x)| = |e^{-i\omega x}|\, |f(x)| = |f(x)|$$

y existe $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$; en particular vemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\hat{f}(\omega)| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx; \quad -\infty < \omega < \infty, \\ \text{de modo que } \ \hat{f}(\omega) \ \text{ es acotada en } \ -\infty < \omega < \infty. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Más aún se puede demostrar que

$$\hat{f} \in C(\mathbb{R}) \ \text{ y } \lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{(lema de Riemman-Lebesgue).} \tag{3}$$

(observe que $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}$ significa $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}$). Utilizamos la notación $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$ para indicar que $\hat{f}(\omega)$ es la transformada de Fourier (TF) de $f(x)$.

Un ejemplo más adelante ilustrará que $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (es decir la TF de una

$f \in L^{'}(\mathbb{R})$ nos puede llevar fuera de $L^1(\mathbb{R})$). Tenemos el resultado:

$$\left.\begin{array}{l} f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \implies f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega \;\; \text{c.s. en}\mathbb{R} \\ \text{(fórmula de inversión). Cuando } f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ y } f \in C(\mathbb{R}), \text{ entonces} \\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega; \;\; -\infty < x < \infty \end{array}\right\} \tag{4}$$

El resultado (4) describe la situación donde podemos aplicar la TF inversa $\hat{f}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(x)$ en $L^1(\mathbb{R})$

Una función $f(x)$ de soporte compacto evidentemente pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, y para una f tal podemos escribir TF como corchete:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} < f(x), e^{-iwx} >_x \tag{5}$$

Como hicimos con la TL, podemos observar que el corchete tiene sentido cuando f es una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de soporte compacto y tomar (5) como definición de la TF de una distribución de soporte compacto (más adelante presentaremos una definición alternativa para la TF de una cierta clase de distribución). Así obtenemos con (5)

$$\left.\begin{array}{l} \delta_a(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} < \delta_a(x), \;\; e^{-i\omega x} >_x = \frac{1}{2\pi} \;\; e^{-ia\omega}, \\ \text{en particular } \;\delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es de soporte compacto, también lo son f'_{gen}, f''_{gen}, $\cdots$ y tenemos según (5)

$$\begin{aligned} f^n_{gen}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} < f^n_{gen}(x), e^{-i\omega x} >_x &= \frac{1}{2\pi}(-1)^n < f(x), (-i\omega)^n e^{-i\omega x} >_x \\ &= (i\omega)^n \frac{1}{2\pi} < f(x), e^{-i\omega x} >_x, \end{aligned}$$

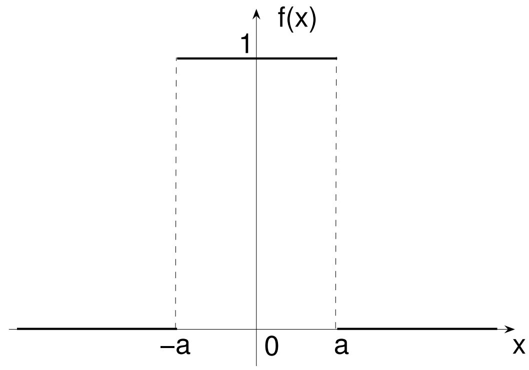
es decir,

$$f^{(n)}_{gen}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega); \;\; n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{7}$$

Esta fórmula es muy útil (igual como la fórmula análoga para la TL) para calcular TF de manera eficiente (sin evaluar integrales)

Ejemplo 1. *Sea*

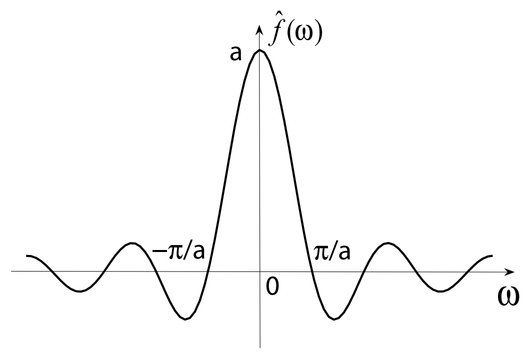
$$f(x) = \begin{cases} 1; & -a < x < a \\ 0; & \textit{otro caso.} \end{cases}$$



Tenemos $f'_{gen}(x) = \delta_{-a}(x) - \delta_a(x)$

$$\xrightarrow[(6),(7)]{\mathcal{F}} (i\omega)\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}) = \frac{1}{2\pi}2i\,\mathrm{sen}(a\omega) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{\mathrm{sen}(a\omega)}{\pi\omega}.$$

con gráfica



De acuerdo con (3) tenemos $\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{\ }(\omega) = 0$. *Puede demostrarse que* $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, *es decir, aquí tenemos un caso donde* $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *como se enunció arriba.*

Observe que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ *en el ejemplo anterior. Esto siempre ocurre cuando* f *es de soporte compacto porque en (5) podemos tomar las derivadas con respecto a* ω *según*

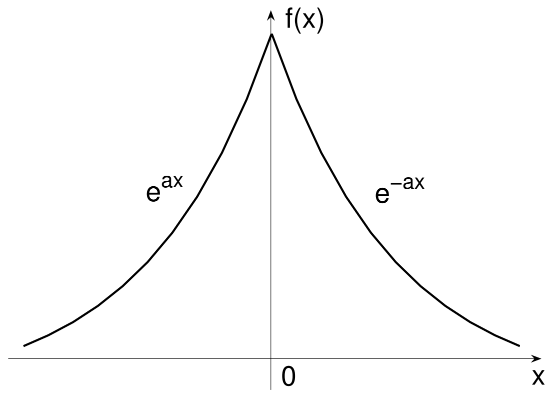
$$\frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} < f(x),\ \ (-ix)^n\ \ e^{-i\omega x} >_x = \frac{1}{2\pi} < (-1x)^n f(x),\ \ e^{-i\omega x} >_x$$

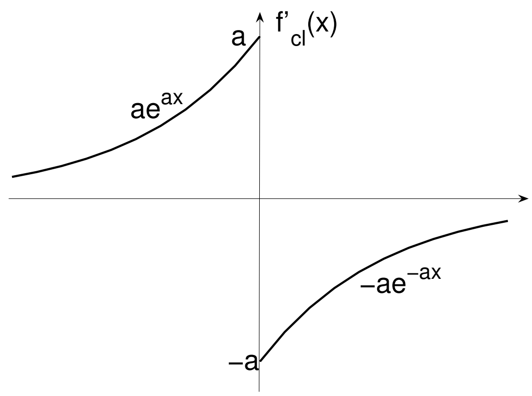
(multiplicación de una distribución son una función C^∞*), de modo que según (5) tenemos*

$$(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d^n\hat{f}}{d\omega^n};\ \ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

Como veremos más adelante, la fórmula (7) vale también para cosas más generales, por ejemplo $f \in L^1(\mathbb{R})$ *no necesariamente de soporte compacto.*

Ejemplo 2. *Sea* $f(x) = e^{-a|x|}$; $-\infty < x < \infty$ *con* $a > 0$ *una constante. Tenemos* $f \in L^1(\mathbb{R})$

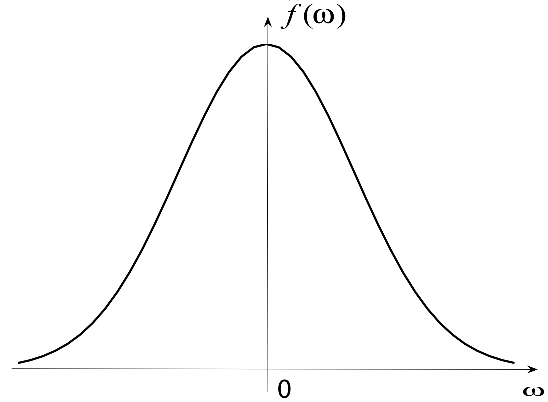




$$f''_{cl}(x) = a^2 f(x)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f'_{gen}(x) &= f'_{cl}(x), \quad f''(x) = f''_{cl}(x) - 2a\delta(x) \\
\Longrightarrow \quad f''_{gen}(x) &= a^2 f(x) - 2a\delta(x) \xrightarrow[(6),(7)]{\mathcal{F}} (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = a^2 \hat{f}(\omega) - \frac{a}{\pi} \\
\Longrightarrow \quad (a^2 + \omega^2)\hat{f}(\omega) &= \frac{a}{\pi} \\
\Longrightarrow \quad \hat{f}(\omega) &= \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}, \quad \textit{es decir (con (1))} \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-a|x|} dx &= \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}; \ -\infty < \omega < \infty
\end{aligned}$$



Como evidentemente $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ también, la fórmula de inversión (ver (4)) nos da inmediatamente

$$e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + \omega^2} d\omega \, ; \; -\infty < x < \infty$$

Así calculamos dos integrales impropias de "aspecto complicado" con un <u>mínimo de esfuerzo</u>.

Nuestro próximo objetivo será extender la TF a <u>distribuciones</u>. Consideramos nuevamente el caso $f \in L^1(\mathbb{R})$, considerando ahora f como distribución (regular) $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
< \hat{f}, \varphi > &= \int^{\infty} \hat{f}(\omega) d\omega \stackrel{(1)}{=} \int_{\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \right) \varphi(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega x} f(x) \varphi(\omega) dx d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi(\omega) d\omega \right) dx \stackrel{(1)}{=} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{\varphi}(x) dx \quad \text{(utilizamos} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \text{ ya que } \varphi \\
&\quad \text{es de soporte compacto)}
\end{aligned}$$

$$\implies < \hat{f}, \varphi > = < f, \hat{\varphi} >; \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) (f \in L^1(\mathbb{R})). \tag{9}$$

Este resultado sugiere definir para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ su TF $\hat{T}$ por

$$< \hat{T}, \varphi > = < T, \hat{\varphi} >, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Lamentablemente esta definición <u>no tendrá sentido</u> para <u>todo</u> $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ya que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, de modo que el corchete $< T, \hat{\varphi} >$ puede no tener sentido para una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

arbitraria (de hecho se puede demostrar que $\hat{\varphi}$ nunca pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, excepto cuando $\varphi = 0$). Vemos entonces que la TF de distribuciones puede ser definido solamente para una cierta subclase de distribuciones. Este subespacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vamos a definir más adelante.

2. El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definimos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de todas las funciones complejas en $C^\infty(\mathbb{R})$ que juntos con cualquiera de sus derivadas tiende a 0 más rápido que cualquier exponente de $\frac{1}{|x|}$ cuando $x \longrightarrow \pm\infty$ (es decir $|x| \to \infty$). El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se llama el espacio de las funciones de prueba de decrecimiento rápido (o espacio de las funciones de prueba de Schwartz). Tenemos

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \ \text{ y} \\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{array}\right\} \tag{10}$$

La primera afirmación es evidente por la rapidez del decrecimiento a 0 de $\varphi(x)$ cuando $|x| \to \infty$ (lo que garantiza la existencia de $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|dx$). Demostramos ahora la segunda afirmación. Tenemos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow x^\ell \varphi(x)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ para todo entero $\ell \geq 0$, por lo tanto según (8) tenemos $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además, para $\ell, m \geq 0$ enteros,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{(\ell)}(\omega) &\overset{(8)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(-x)^\ell \varphi(x)dx \\ \overset{(7)}{\Longrightarrow} (i\omega)^m \hat{\varphi}^{(\ell)}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(-(x)^\ell \varphi(x))^{(m)}dx = ((\widehat{-ix)^\ell \varphi(x)})^{(m)}(\omega), \end{aligned}$$

función acotada de ω por (3) $\Longrightarrow |\omega^m \hat{\varphi}^{(\ell)}(\omega)|$ acotada para todo entero $\ell, m > 0 \Longrightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo que demuestra (10). Tenemos ahora

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{(10)}{\Longrightarrow} \varphi, \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{(10)}{\Longrightarrow} \varphi, \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$$

$\Longrightarrow$ es válida la fórmula de inversión (4), es decir,

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{\varphi}(\omega))d\omega; \ \ -\infty < x < \infty \ \ (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})) \tag{11}$$

y tenemos $\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \varphi$. Tenemos entonces:

$$\text{la TF es una biyección } \mathcal{F}: \ \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{12}$$

Ejemplo 3. *Sea* $f(x) = e^{-x^2/2}$*;* $-\infty < x < \infty$ *(una campana de Gauss). Esta función pertenece a* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*, calculemos su TF. Tenemos* $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$*,* $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *y* $f(x)$ *es solución del PVI*

$$\begin{cases} f'(x) + xf(x) = 0; & -\infty < x < \infty \\ f(0) = 1, \end{cases} \tag{13}$$

Tenemos

$$f'(x) + xf(x) = 0 \quad \underset{(7),(8)}{\xrightarrow{\mathcal{F}}} \quad i\omega\hat{f}(\omega) + i\hat{f}'(\omega) = 0 \implies \hat{f}'(\omega) + \omega\hat{f}(\omega) = 0,$$

y además

$$2\pi\hat{f}(0) \stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi} \ \ \textit{(patrimonio cultural).}$$

Entonces

$$g(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)$$

es solución del PVI

$$\begin{cases} g'(\omega) + \omega g(\omega); & -\infty < \omega < \infty \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Este problema tiene la <u>*misma*</u> *forma como (13), por lo tanto por la unicidad de la solución del PVI tenemos*

$$g(\omega) = e^{-\omega^2/2},$$

es decir,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2},$$

nuevamente una campana de Gauss. Así $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *también, como debe ser según (12). Via cambio de variable se puede verificar (¡Ejercicio!)*

$$e^{-\lambda x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}e^{-\dfrac{\omega^2}{4\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

De esto, y con (8) tenemos

$$-xe^{-x^2/2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\omega e^{-\dfrac{\omega^2}{2}}$$

$$(x^2 - 1)e^{-x^2/2} \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\omega^2 e^{-\dfrac{\omega^2}{2}}, \quad \cdots \quad \textit{etc.}$$